Kartkówka 15.05.2018

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z$$

i sklasyfikować je, tzn. dla każdego z nich określić, czy jest to minimum lokalne, maksimum lokalne, czy żadne z tych dwóch.

Obliczamy:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 2y - x \\ 2z + 2 \end{pmatrix}, \qquad D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Układ równań opisujący punkty krytyczne to:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 & = 0 \\ 2y - x & = 0 \\ 2z + 2 & = 0 \end{cases}$$

Łatwo dochodzimy do tego, że jedynym rozwiązaniem (a więc jedynym punktem krytycznym) jest $(x, y, z) = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1)$. Macierz drugiej różniczki w tym punkcie jest już obliczona powyżej. Sprawdzamy, że wyznaczniki trzech kolejnych podmacierzy

$$\det(2) = 2 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

są dodatnie, więc na mocy kryterium Sylvestera macierz jest dodatnio określona, a funkcja f ma w badanych punkcie silne minimum lokalne.

Zadanie 2. Zastosować kryterium Sylvestera do poniższych macierzy symetrycznych i dla każdej z nich podać jej „określoność" (do wyboru są opcje > 0, < 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$ oraz *nieokreślona*):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Każdy z tych przypadków można zbadać bezpośrednio przez przypatrzenie się formie kwadratowej odpowiadającej macierzy. Poniżej korzystam jednak z kryterium Sylvestera.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ – nieokreślona}$$

Wyznacznik całej macierzy jest równy -4, a więc ujemny.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

Wyznaczniki trzech kolejnych podmacierzy są dodatnie (kolejno 5, 9, 16).

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \leqslant 0$$

Wyznaczniki macierzy jednoelementowych (-4), (-9) są niedodatnie, a wyznacznik całej macierzy nieujemny (bo równy 0). Zerowość wyznacznika całej macierzy wyklucza ścisłą określoność. Podkreślam, że należało również sprawdzić znak przy -9, o czym większość piszących zapominała.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} < 0$$

Wyznaczniki dwóch kolejnych podmacierzy to -2 i 3, a więc mają **odpowiednio** naprzemienne znaki.

Uwaga. W razie wątpliwości co do właściwej kolejności znaków w dwóch ostatnich przykładach można wziąć macierz z przeciwnym znakiem i sprawdzić

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$